

2.9.5 Exponenciální rovnice II

Předpoklady: 2904

Př. 1: Vyřeš rovnici $3 \cdot 2^x + 2^x = 32$.

Problém: Na levé straně máme $3 \cdot 2^x + 2^x$, mezi mocninami je $+$ \Rightarrow mocniny nemůžeme dát dohromady podle vzorců pro počítání s mocninami. Můžeme ale substituovat $y = 2^x$ a dořešit exponenciální část rovnice později.

$$3 \cdot 2^x + 2^x = 32$$

Substituce: $y = 2^x \Rightarrow 3y + y = 32$

$$4y = 32$$

$$y = 8$$

Návrat k původní proměnné: $y = 2^x = 8$

$$2^x = 8$$

$$2^x = 2^3$$

$$x = 3$$

$$K = \{3\}$$

Poznámka: Předchozí příklad je samozřejmě možné řešit (stejně jako i mnoho dalších) bez substituce pouze vytknutím, takto: $3 \cdot 2^x + 2^x = 32$.

$$2^x(3+1) = 32$$

$$4 \cdot 2^x = 32$$

$$2^x = 8$$

$$x = 3$$

Substituce však řešení příkladu většinou usnadňuje a rozhodně ho činí přehlednějším.

Př. 2: Vyřeš rovnici $2 \cdot 3^x + 3^{x+1} = 5$.

Stejně jako předchozí příklad, pouze druhý člen si musíme upravit.

$$2 \cdot 3^x + 3^x \cdot 3^1 = 5$$

Substituce: $y = 3^x \Rightarrow 2y + 3y = 5$

$$5y = 5$$

$$y = 1$$

Návrat k původní proměnné:

$$y = 3^x = 1$$

$$3^x = 3^0$$

$$x = 0$$

$$K = \{0\}$$

Ještě než se pustíme do dalších rovnic, procvičíme si substituování.

Jak dopadne substituce výrazu 3^{x+1} , když používáme substituci $3^{x-1} = y$?

Musíme výraz 3^{x+1} upravit tak, aby se v něm objevil výraz 3^{x-1} :

Možností je mnoho, každý si může vybrat tu, která je pro něj nejpřirozenější:

- $3^{x+1} = 3^{\overbrace{x-1+1+1}^0} = 3^{x-1} \cdot 3^2 = 9y$
- $3^{x+1} = 3^{\overbrace{x-1+2}^1} = 3^{x-1} \cdot 3^2 = 9y$
- $3^{x+1} = 3^{x+1} \frac{3^2}{3^2} = \frac{3^{x+1}}{3^2} 3^2 = 3^{x-1} \cdot 3^2 = 9y$
- atd.

Pedagogická poznámka: Snažím se na tabuli ukázat více možností, nechávám na studentech, aby si vybrali způsob, který je jim vlastní. Vnučovat studentům nějaký mechanický postup je zbytečné, ihned ho zapomínají a dělají v něm hodně chyb.

Př. 3: Proveď substituci výrazů:

a) 2^{x+2} , 2^{x-1} , 2^{-x} pokud platí $y = 2^x$,

b) 3^{x+2} , 3^{x-3} , 3^{3-x} pokud platí $y = 3^{x-2}$

c) $\left(\frac{3}{2}\right)^{x+2}$, $\left(\frac{3}{2}\right)^{x-1}$, $\left(\frac{2}{3}\right)^{x+2}$ pokud platí $y = \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1}$

a) 2^{x+2} , 2^{x-1} , 2^{-x} pokud platí $y = 2^x$

$$2^{x+2} = 2^x \cdot 2^2 = 4y \qquad 2^{x-1} = 2^x \cdot 2^{-1} = \frac{y}{2} \qquad 2^{-x} = \frac{1}{2^x} = \frac{1}{y}$$

b) 3^{x+2} , 3^{x-3} , 3^{3-x} pokud platí $y = 3^{x-2}$

$$3^{x+2} = 3^{x-2+2+2} = 3^{x-2} \cdot 3^4 = 81y \qquad 3^{x-3} = 3^{x-2-1} = 3^{x-2} \cdot 3^{-1} = \frac{y}{3}$$

$$3^{3-x} = \frac{1}{3^{x-3}} = \frac{1}{3^{x-2} \cdot 3^{-1}} = \frac{3}{y}$$

c) $\left(\frac{3}{2}\right)^{x+2}$, $\left(\frac{3}{2}\right)^{x-1}$, $\left(\frac{2}{3}\right)^{x+2}$ pokud platí $y = \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1}$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x+2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1+1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3y}{2}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1-1-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = y \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4y}{9}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x+2} = \left(\left[\frac{3}{2}\right]^{-1}\right)^{x+2} = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{x+2}\right]^{-1} = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} \left(\frac{3}{2}\right)\right]^{-1} = \left[\frac{3y}{2}\right]^{-1} = \frac{2}{3y}$$

Pedagogická poznámka: Větší problémy bývají pouze v bodě c), kde většinou příklad počítáme na tabuli s tím, že se dohodneme na pořadí kroků a hlavně kontrolujeme postupnost výpočtu s použitím závorek.

Ještě jedna dobrá rada: Možností, jak provést substituci, je většinou více. Snažíme se najít takovou, která co nejvíce zjednoduší další výpočet (složitější výraz v substituci).

Př. 4: Vyřeš rovnici $\frac{3^{x+4}}{9} + 9 \cdot 3^x = \frac{2}{3}$.

Problém: Nemůžeme ihned substituovat $y = 3^x$, protože neznámá x se vyskytuje v různých výrazech \Rightarrow upravíme vše tak aby šlo použít $y = 3^x$. Dále pak jako na začátku hodiny.

$$\frac{3^x \cdot 3^4}{9} + 9 \cdot 3^x = \frac{2}{3}$$

Substitute: $y = 3^x \Rightarrow \frac{y \cdot 3^4}{3^2} + 9 \cdot y = \frac{2}{3}$

$$9y + 9y = \frac{2}{3}$$

$$18y = \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{1}{27}$$

Návrat k původní proměnné:

$$y = 3^x = \frac{1}{27}$$

$$3^x = \frac{1}{27} = 3^{-3}$$

$$x = -3$$

$$K = \{-3\}$$

Př. 5: Vyřeš rovnici $3^x - 2 \cdot 3^{x-1} + 3^{x-2} - 2 \cdot 3^{x-3} = 30$.

Problém: Opět budeme muset upravovat výrazy před substitucí. Jakou substitucí zvolit? Pokud substituujeme 3^{x-3} pomocí $y = 3^x$ vzniknou nám zlomky (a s těmi se špatně počítá)
 \Rightarrow

Substitute: $y = 3^{x-3}$, $3^x = 3^{x-3} \cdot 3^3 = 27y$, $3^{x-1} = 3^{x-3} \cdot 3^2 = 9y$, $3^{x-2} = 3^{x-3} \cdot 3^1 = 3y$

$$27y - 2 \cdot 9y + 3y - 2 \cdot y = 30$$

$$10y = 30$$

$$y = 3$$

Návrat k původní proměnné:

$$y = 3^{x-3} = 3$$

$$x - 3 = 1$$

$$x = 4$$

$$K = \{4\}$$

Př. 6: Vyřeš rovnici $2^{2-x} = 2^{4-x} - 3\sqrt[3]{2}$.

Hledáme substituci: Nejlepší možnost: $y = 2^{2-x}$ (získáme jednoduchou rovnici bez zlomků)

$$2^{2-x} = 2^2 \cdot 2^{2-x} - 3\sqrt[3]{2}$$

Substitute: $y = 2^{2-x}$

$$y = 4y - 3\sqrt[3]{2}$$

$$3\sqrt[3]{2} = 3y$$

$$y = \sqrt[3]{2}$$

Návrat k původní proměnné:

$$y = 2^{2-x} = \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$$

$$2-x = \frac{1}{3}$$

$$2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} = x$$

$$K = \left\{ \frac{5}{3} \right\}$$

Př. 7: Vyřeš rovnici $2 \cdot 4^x - 9 \cdot 2^x + 4 = 0$.

Zkusíme upravit na substituci $2^x = y$.

$$2 \cdot 4^x - 9 \cdot 2^x + 4 = 0$$

$$2 \cdot (2^2)^x - 9 \cdot 2^x + 4 = 0$$

$$2 \cdot (2^x)^2 - 9 \cdot 2^x + 4 = 0$$

Substituce: $y = 2^x$

$$2y^2 - 9y + 4 = 0$$

$$\text{Kvadratická rovnice: } y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4}}{2 \cdot 2} = \frac{9 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{9 \pm 7}{4}$$

$$y_1 = \frac{9+7}{4} = 4$$

$$y_2 = \frac{9-7}{4} = \frac{1}{2}$$

Návrat k původní proměnné:

$$y_1 = 2^{x_1} = 4$$

$$2^{x_1} = 2^2$$

$$x_1 = 2$$

$$y_2 = 2^{x_2} = \frac{1}{2}$$

$$2^{x_2} = 2^{-1}$$

$$x_2 = -1$$

$$K = \{-1; 2\}$$

Př. 8: Vyřeš rovnici $4^x + 4^{\frac{3}{2-x}} = 9$.

Zkusíme rovnici upravit pro substituci $y = 4^x$: $4^x + \frac{4^{\frac{3}{2}}}{4^x} = 9$.

$$4^x + \frac{(2^2)^{\frac{3}{2}}}{4^x} = 9$$

$$4^x + \frac{8}{4^x} = 9$$

Substituce: $4^x = a$

$$a + \frac{8}{a} = 9 \quad / \cdot a$$

$$a^2 + 8 = 9a$$

$$a^2 - 9a + 8 = 0$$

$$(a-8)(a-1) = 0$$

$$a_1 = 8 \qquad a_2 = 1$$

Návrat k původní proměnné:

$$a_1 = 4^{x_1} = 8$$

$$a_2 = 4^{x_2} = 1$$

$$(2^2)^{x_1} = 2^{2x_1} = 2^3$$

$$4^{x_2} = 4^0$$

$$2x_1 = 3$$

$$x_2 = 0$$

$$x_1 = \frac{3}{2}$$

$$K = \left\{ 0; \frac{3}{2} \right\}$$

Pedagogická poznámka: Následující příklad je velmi zajímavý, synchronizujte třídu na předchozím příkladu, aby ho všichni mohli zkusit vyřešit.

Př. 9: Vyřeš rovnici $4^{x-0,2} - 2 \cdot 4^{0,2-x} = 1$.

Problém: Číslo $4^{0,2}$ není zrovna nejběžnější \Rightarrow snažíme se o zahrnutí do substituce.

Postřeh: Platí: $4^{0,2-x} = 4^{-(x-0,2)} = \frac{1}{4^{x-0,2}}$

$$4^{x-0,2} - \frac{2}{4^{x-0,2}} = 1$$

Substituce: $4^{x-0,2} = a$

$$a - \frac{2}{a} = 1 \quad / \cdot a$$

$$a^2 - 2 = a$$

$$a^2 - a - 2 = 0$$

$$(a-2)(a+1) = 0$$

$$a_1 = 2 \qquad a_2 = -1$$

Návrat k původní proměnné:

$$a_1 = 4^{x_1-0,2} = 2$$

$$a_2 = 4^{x_2-0,2} = -1$$

$$(2^2)^{x_1-0,2} = 2^{2x_1-0,4} = 2^1$$

Mocnina čísla 4 nemůže být nikdy záporné číslo $\Rightarrow K_2 = \emptyset$

$$2x_1 - 0,4 = 1$$

$$2x_1 = 1,4$$

$$x_1 = 0,7$$

$$K = \{0,7\}$$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je dobrou ukázkou toho, jak důležité je si něco pamatovat. Pokud studenti nemají zažito, že platí $a^{-1} = \frac{1}{a}$, těžko je může použítá substituce napadnout. Hodně studentů si neví rady s rovnicí $a_2 = 4^{x_2-0,2} = -1$. V prvním okamžiku nikdy neprozrazuji výsledek, ale radím, aby opět promysleli, jaký je význam čísla 4^x .

Př. 10: Petáková:
strana 34/cvičení 2 b) c) d)
strana 34/cvičení 3 b) e) f)

Shrnutí: Substituci provádíme tak, aby vznikla co nejjednodušší rovnice.